Il preantipode ed il Teorema Fondamentale di Struttura per i quasi-bimoduli di Hopf

Paolo Saracco

Università degli Studi di Torino

9 Dicembre 2014

Introduzione

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\quad \Rightarrow \quad N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Introduzione

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\quad \Rightarrow \quad N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Introduzione

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\quad\Rightarrow\quad N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Alcune definizioni I

$\Bbbk$ campo fissato. Tutti gli spazi vettoriali sono intesi su $\Bbbk$. $\otimes$ indica il tensore su $\Bbbk$.

Definizione (Algebra)

Una ($\Bbbk$-)algebra è uno spazio vettoriale A dotato di una unità $u : \Bbbk \to A$ e di una moltiplicazione $m : A \otimes A \to A$ tali che i seguenti diagrammi commutino:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "A\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "u\otimes A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "A\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Definizione (Coalgebra)

Una ($\Bbbk$-)coalgebra è uno spazio vettoriale C dotato di una counità $\varepsilon : C \to \Bbbk$ e di una comoltiplicazione $\Delta : C \to C \otimes C$ tali che i seguenti diagrammi commutino:

$$\begin{tikzcd}
(C \otimes C) \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "C\otimes\Delta"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes C"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes C"'] \arrow[r, "C\otimes\varepsilon"] & C \otimes \Bbbk \\
& C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Alcune definizioni I

$\Bbbk$ campo fissato. Tutti gli spazi vettoriali sono intesi su $\Bbbk$. $\otimes$ indica il tensore su $\Bbbk$.

Definizione (Algebra)

Una (**$\Bbbk$-)algebra** è uno spazio vettoriale A dotato di una **unità** $u : \Bbbk \to A$ e di una **moltiplicazione** $m : A \otimes A \to A$ tali che i seguenti diagrammi commutino:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "A\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "u\otimes A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "A\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Definizione (Coalgebra)

Una (**$\Bbbk$-)coalgebra** è uno spazio vettoriale C dotato di una **counità** $\varepsilon : C \to \Bbbk$ e di una **comoltiplicazione** $\Delta : C \to C \otimes C$ tali che i seguenti diagrammi commutino:

$$
\begin{tikzcd}
(C \otimes C) \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "C\otimes\Delta"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes C"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes C"'] \arrow[r, "C\otimes\varepsilon"] & C \otimes \Bbbk \\
& C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}
$$

Alcune definizioni II

Definizione (Modulo)

Sia (A, m, u) un'algebra. Uno spazio vettoriale M è un A-modulo (destro) se è dotato di un'azione $\mu \colon M \otimes A \to M$. I.e., il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "M\otimes m"] \arrow[d, "\mu\otimes A"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu"] & M \otimes \Bbbk \arrow[l, "M\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & M & \end{tikzcd}$$

Definizione (comodulo)

Sia (C, Δ, ε) una coalgebra. Uno spazio vettoriale N è un C-comodulo (destro) se è dotato di una coazione $\rho \colon N \to N \otimes C$. I.e., il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} N \otimes C \otimes C & N \otimes C \arrow[l, "N\otimes\Delta"'] \arrow[r, "N\otimes\varepsilon"] & N \otimes \Bbbk \\ N \otimes C \arrow[u, "\rho\otimes C"] & N \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "\rho"'] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Alcune definizioni II

Definizione (Modulo)

Sia (A, m, u) un'algebra. Uno spazio vettoriale M è un A-modulo (destro) se è dotato di un'azione $\mu \colon M \otimes A \to M$. I.e., il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "M\otimes m"] \arrow[d, "\mu\otimes A"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu"] & M \otimes \mathbb{k} \arrow[l, "M\otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & M & \end{tikzcd}$$

Definizione (comodulo)

Sia (C, Δ, ε) una coalgebra. Uno spazio vettoriale N è un C-comodulo (destro) se è dotato di una coazione $\rho \colon N \to N \otimes C$. I.e., il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} N \otimes C \otimes C & N \otimes C \arrow[l, "N\otimes\Delta"'] \arrow[r, "N\otimes\varepsilon"] & N \otimes \mathbb{k} \\ N \otimes C \arrow[u, "\rho\otimes C"] & N \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "\rho"'] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

Bialgebre: definizione e proprietà elementari

Proposizione

Una *bialgebra* *è uno spazio vettoriale* B *dotato di una struttura di algebra* (B, m, u) *e di coalgebra* (B, Δ, ε) *che soddisfino una delle seguenti proprietà equivalenti:*

- Δ *e* ε *sono morfismi di algebre;*
- m *e* u *sono morfismi di coalgebre.*

$(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. M, N in $\mathcal{M}_B := \{B\text{-moduli destri}\}$.

- $M \otimes N$ diventa B-modulo attraverso Δ: $\mu_\otimes((m \otimes n) \otimes b) = (m \otimes n) \cdot \Delta(b)$.
- $\Bbbk$ diventa B-modulo attraverso ε: $\mu_\Bbbk(k \otimes b) = k\,\varepsilon(b)$.

Sweedler's Sigma Notation (variante)

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} =: x_1 \otimes x_2 \quad \text{e} \quad \rho(n) = \sum_{(n)} n_{(0)} \otimes n_{(1)} =: n_0 \otimes n_1 .$$

Esempio

$$(m \otimes n) \cdot \Delta(b) = (m \cdot b_1) \otimes (n \cdot b_2)$$

Bialgebre: definizione e proprietà elementari

Proposizione

Una *bialgebra* *è uno spazio vettoriale B dotato di una struttura di algebra (B, m, u) e di coalgebra (B, Δ, ε) che soddisfino una delle seguenti proprietà equivalenti:*

- *Δ e ε sono morfismi di algebre;*
- *m e u sono morfismi di coalgebre.*

$(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. M, N in $\mathcal{M}_B := \{B\text{-moduli destri}\}$.

- $M \otimes N$ diventa B-modulo attraverso Δ: $\mu_{\otimes}((m \otimes n) \otimes b) = (m \otimes n) \cdot \Delta(b)$.
- $\Bbbk$ diventa B-modulo attraverso ε: $\mu_{\Bbbk}(k \otimes b) = k\,\varepsilon(b)$.

Sweedler's Sigma Notation (variante)

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} =: x_1 \otimes x_2 \quad \text{e} \quad \rho(n) = \sum_{(n)} n_{(0)} \otimes n_{(1)} =: n_0 \otimes n_1 .$$

Esempio

$$(m \otimes n) \cdot \Delta(b) = (m \cdot b_1) \otimes (n \cdot b_2)$$

Bialgebre: definizione e proprietà elementari

Proposizione

Una bialgebra è uno spazio vettoriale B dotato di una struttura di algebra (B, m, u) e di coalgebra (B, Δ, ε) che soddisfino una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *Δ e ε sono morfismi di algebre;*
- *m e u sono morfismi di coalgebre.*

$(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. M, N in $\mathcal{M}_B := \{B\text{-moduli destri}\}$.

- $M \otimes N$ diventa B-modulo attraverso Δ: $\mu_\otimes((m \otimes n) \otimes b) = (m \otimes n) \cdot \Delta(b)$.
- $\Bbbk$ diventa B-modulo attraverso ε: $\mu_\Bbbk(k \otimes b) = k\,\varepsilon(b)$.

Sweedler's Sigma Notation (variante)

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} =: x_1 \otimes x_2 \quad \text{e} \quad \rho(n) = \sum_{(n)} n_{(0)} \otimes n_{(1)} =: n_0 \otimes n_1.$$

Esempio

$$(m \otimes n) \cdot \Delta(b) = (m \cdot b_1) \otimes (n \cdot b_2)$$

Bialgebre: definizione e proprietà elementari

Proposizione

Una bialgebra *è uno spazio vettoriale B dotato di una struttura di algebra (B, m, u) e di coalgebra (B, Δ, ε) che soddisfino una delle seguenti proprietà equivalenti:*

- *Δ e ε sono morfismi di algebre;*
- *m e u sono morfismi di coalgebre.*

$(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. M, N in $\mathcal{M}_B := \{B\text{-moduli destri}\}$.

- $M \otimes N$ diventa B-modulo attraverso Δ: $\mu_\otimes((m \otimes n) \otimes b) = (m \otimes n) \cdot \Delta(b)$.
- $\Bbbk$ diventa B-modulo attraverso ε: $\mu_\Bbbk(k \otimes b) = k\,\varepsilon(b)$.

Sweedler's Sigma Notation (variante)

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} =: x_1 \otimes x_2 \quad \text{e} \quad \rho(n) = \sum_{(n)} n_{(0)} \otimes n_{(1)} =: n_0 \otimes n_1.$$

Esempio

$$(m \otimes n) \cdot \Delta(b) = (m \cdot b_1) \otimes (n \cdot b_2)$$

La teoria classica - Moduli di Hopf

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. (B, m) è B-modulo destro e $((B, m), \Delta, \varepsilon)$ è una coalgebra in $\mathcal{M}_B$. Dunque ha senso considerare $\mathcal{M}_B^B := (\mathcal{M}_B)^B$.

Definizione (Moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Un modulo di Hopf su B è uno spazio vettoriale M dotato di due strutture $\mu\colon M \otimes B \to M$ e $\rho\colon M \to M \otimes B$ che siano compatibili. I.e.:

$$(m \cdot b)_0 \otimes (m \cdot b)_1 = \rho(m \cdot b) = \rho(m) \cdot \Delta(b) = m_0 \cdot b_1 \otimes m_1 b_2.$$

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale. $V \otimes B$ è un modulo di Hopf con strutture:

$$(v \otimes b) \cdot x := v \otimes (bx) \qquad \text{e} \qquad \rho(v \otimes b) = (v \otimes b_1) \otimes b_2.$$

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di un modulo di Hopf M è lo spazio vettoriale

$$M^{\mathrm{Co}B} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

La teoria classica - Moduli di Hopf

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. (B, m) è B-modulo destro e $((B, m), \Delta, \varepsilon)$ è una coalgebra in $\mathcal{M}_B$. Dunque ha senso considerare $\mathcal{M}_B^B := (\mathcal{M}_B)^B$.

Definizione (Moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Un modulo di Hopf su B è uno spazio vettoriale M dotato di due strutture $\mu\colon M \otimes B \to M$ e $\rho\colon M \to M \otimes B$ che siano compatibili. I.e.:

$$(m \cdot b)_0 \otimes (m \cdot b)_1 = \rho(m \cdot b) = \rho(m) \cdot \Delta(b) = m_0 \cdot b_1 \otimes m_1 b_2.$$

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale. $V \otimes B$ è un modulo di Hopf con strutture:

$$(v \otimes b) \cdot x := v \otimes (bx) \qquad \text{e} \qquad \rho(v \otimes b) = (v \otimes b_1) \otimes b_2.$$

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di un modulo di Hopf M è lo spazio vettoriale

$$M^{\mathrm{Co}B} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

La teoria classica - Moduli di Hopf

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. (B, m) è B-modulo destro e $((B, m), \Delta, \varepsilon)$ è una coalgebra in $\mathcal{M}_B$. Dunque ha senso considerare $\mathcal{M}_B^B := (\mathcal{M}_B)^B$.

Definizione (Moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Un modulo di Hopf su B è uno spazio vettoriale M dotato di due strutture $\mu\colon M \otimes B \to M$ e $\rho\colon M \to M \otimes B$ che siano compatibili. I.e.:

$$(m \cdot b)_0 \otimes (m \cdot b)_1 = \rho(m \cdot b) = \rho(m) \cdot \Delta(b) = m_0 \cdot b_1 \otimes m_1 b_2.$$

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale. $V \otimes B$ è un modulo di Hopf con strutture:

$$(v \otimes b) \cdot x := v \otimes (bx) \qquad \text{e} \qquad \rho(v \otimes b) = (v \otimes b_1) \otimes b_2.$$

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di un modulo di Hopf M è lo spazio vettoriale

$$M^{\mathrm{Co}B} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

La teoria classica - Moduli di Hopf

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. (B, m) è B-modulo destro e $((B, m), \Delta, \varepsilon)$ è una coalgebra in $\mathcal{M}_B$. Dunque ha senso considerare $\mathcal{M}_B^B := (\mathcal{M}_B)^B$.

Definizione (Moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Un modulo di Hopf su B è uno spazio vettoriale M dotato di due strutture $\mu \colon M \otimes B \to M$ e $\rho \colon M \to M \otimes B$ che siano compatibili. I.e.:

$$(m \cdot b)_0 \otimes (m \cdot b)_1 = \rho(m \cdot b) = \rho(m) \cdot \Delta(b) = m_0 \cdot b_1 \otimes m_1 b_2.$$

Lemma

Sia V uno spazio vettoriale. $V \otimes B$ è un modulo di Hopf con strutture:

$$(v \otimes b) \cdot x := v \otimes (bx) \qquad \text{e} \qquad \rho(v \otimes b) = (v \otimes b_1) \otimes b_2.$$

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di un modulo di Hopf M è lo spazio vettoriale

$$M^{\mathrm{Co}B} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

La teoria classica - Moduli e algebre di Hopf

Teorema

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *una bialgebra.* $\forall\, M$ *di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$$

Definizione (Algebre di Hopf [Sweedler, 1969])

- $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. $\forall\, f, g \in \hom_{\Bbbk}(B, B) =: \mathcal{H}$ definiamo

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

  Allora $(\mathcal{H}, *, u \circ \varepsilon)$ è un'algebra associativa e unitaria.
- $s \in \mathcal{H}$ tale che $s * \mathrm{Id}_B = u \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_B * s$ prende il nome di antipode per B.
- Una bialgebra con antipode è un'algebra di Hopf.

Proposizione

L'antipode, se esiste, è unico.

Teorema

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *una bialgebra.* $\forall\, M$ *di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$$

Definizione (Algebre di Hopf [Sweedler, 1969])

- $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. $\forall\, f, g \in \hom_{\Bbbk}(B, B) =: \mathcal{H}$ definiamo

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

  Allora $(\mathcal{H}, *, u \circ \varepsilon)$ è un'algebra associativa e unitaria.

- $s \in \mathcal{H}$ tale che $s * \mathrm{Id}_B = u \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_B * s$ prende il nome di antipode per B.
- Una bialgebra con antipode è un'algebra di Hopf.

Proposizione

L'antipode, se esiste, è unico.

La teoria classica - Moduli e algebre di Hopf

Teorema

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *una bialgebra.* $\forall\, M$ *di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$$

Definizione (Algebre di Hopf [Sweedler, 1969])

- $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. $\forall\, f, g \in \hom_{\Bbbk}(B, B) =: \mathcal{H}$ definiamo

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

  Allora $(\mathcal{H}, *, u \circ \varepsilon)$ è un'algebra associativa e unitaria.
- $s \in \mathcal{H}$ tale che $s * \mathrm{Id}_B = u \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_B * s$ prende il nome di antipode per B.
- Una bialgebra con antipode è un'algebra di Hopf.

Proposizione

L'antipode, se esiste, è unico.

La teoria classica - Moduli e algebre di Hopf

Teorema

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. $\forall\, M$ di Hopf si ha un morfismo naturale:

$$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$$

Definizione (Algebre di Hopf [Sweedler, 1969])

- $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. $\forall\, f, g \in \hom_{\Bbbk}(B, B) =: \mathcal{H}$ definiamo
$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$
  Allora $(\mathcal{H}, *, u \circ \varepsilon)$ è un'algebra associativa e unitaria.
- $s \in \mathcal{H}$ tale che $s * \mathrm{Id}_B = u \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_B * s$ prende il nome di antipode per B.
- Una bialgebra con antipode è un'algebra di Hopf.

Proposizione

L'antipode, se esiste, è unico.

La teoria classica - Moduli e algebre di Hopf

Teorema

Sia $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *una bialgebra.* $\forall\, M$ *di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$$

Definizione (Algebre di Hopf [Sweedler, 1969])

- $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ bialgebra. $\forall\, f, g \in \mathrm{hom}_{\Bbbk}(B, B) =: \mathcal{H}$ definiamo

  $$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

  Allora $(\mathcal{H}, *, u \circ \varepsilon)$ è un'algebra associativa e unitaria.
- $s \in \mathcal{H}$ tale che $s * \mathrm{Id}_B = u \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_B * s$ prende il nome di antipode per B.
- Una bialgebra con antipode è un'algebra di Hopf.

Proposizione

L'antipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *una bialgebra. TFAE:*

- *H è un'algebra di Hopf con antipode s;*
- $\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$ *è un isomorfismo* $\forall\, M$ *modulo di Hopf.*

Cenno di dimostrazione.

Si consideri la proiezione:

$$\tau_M \colon M \to M^{\mathrm{Co}H} \colon m \mapsto m_0 \cdot s(m_1)$$

Si dimostra che

$$\psi_M := (\tau_M \otimes H) \circ \rho_M$$

è l'inversa di ϵ_M, $\forall\, M \in \mathcal{M}_H^H$. □

La teoria classica - Il Teorema di Struttura

Teorema (di Struttura per moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. TFAE:

- *H è un'algebra di Hopf con antipode s;*
- *$\epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}B} \otimes B \to M \colon m \otimes b \mapsto m \cdot b$ è un isomorfismo $\forall\, M$ modulo di Hopf.*

Cenno di dimostrazione.

Si consideri la proiezione:

$$\tau_M \colon M \to M^{\mathrm{Co}H} \colon m \mapsto m_0 \cdot s(m_1)$$

Si dimostra che

$$\psi_M := (\tau_M \otimes H) \circ \rho_M$$

è l'inversa di ϵ_M, $\forall\, M \in \mathcal{M}_H^H$. □

Quasi-bialgebre e quasi-bimoduli di Hopf

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Un'algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta\colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che ε sia counità per Δ e $\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi$.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e $((A, m, m), \Delta, \varepsilon)$ è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

I quasi-bimoduli di Hopf su A sono gli A-comoduli in ${}_A\mathcal{M}_A$, i.e.: ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Quasi-bialgebre e quasi-bimoduli di Hopf

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Un'algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta \colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon \colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che ε sia counità per Δ e $\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi$.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e $((A, m, m), \Delta, \varepsilon)$ è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

I quasi-bimoduli di Hopf su A sono gli A-comoduli in ${}_A\mathcal{M}_A$, i.e.: ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Un'algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta \colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon \colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che ε sia counità per Δ e $\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi$.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e $((A, m, m), \Delta, \varepsilon)$ è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

I quasi-bimoduli di Hopf su A sono gli A-comoduli in ${}_A\mathcal{M}_A$, i.e.: ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Quasi-bialgebre e quasi-bimoduli di Hopf

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Un'algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta \colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon \colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che ε sia counità per Δ e $\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi$.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e $((A, m, m), \Delta, \varepsilon)$ è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

I quasi-bimoduli di Hopf su A sono gli A-comoduli in ${}_A\mathcal{M}_A$, i.e.: ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Un'algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta\colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che ε sia counità per Δ e $\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi$.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e $((A, m, m), \Delta, \varepsilon)$ è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

I quasi-bimoduli di Hopf su A sono gli A-comoduli in ${}_A\mathcal{M}_A$, i.e.: ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Quasi-algebre di Hopf

Definizione (Quasi-algebra di Hopf [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ si dice quasi-algebra di Hopf se ammette un antiendomorfismo s e due elementi privilegiati α e β tali che:

$$s(a_1)\alpha a_2 = \alpha\,\varepsilon(a) \qquad a_1\beta s(a_2) = \beta\,\varepsilon(a)$$

$$\Phi^1\beta s(\Phi^2)\alpha\Phi^3 = 1 \qquad s(\phi^1)\alpha\phi^2\beta s(\phi^3) = 1$$

La terna (s, α, β) prende il nome di quasi-antipode.

Teorema (Hausser e Nill, 1999)

Sia $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ una quasi-algebra di Hopf con s invertibile e sia M un quasi-bimodulo di Hopf su H. Definiamo, per ogni $m \in M$ e $a \in H$,

$$E(m) := \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s\left(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1\right), \quad a \triangleright m := E(a \cdot m), \quad M^{\mathrm{CoH}} := E(M)$$

e dotiamo M^{CoH} di struttura di H-modulo sinistro mediante $\triangleright$. Allora:

$$\nu\colon M^{\mathrm{CoH}} \otimes H \to M\colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

è un isomorfismo di quasi-bimoduli di Hopf con inversa: $\nu^{-1}(m) = E(m_0) \otimes m_1$.

Quasi-algebre di Hopf

Definizione (Quasi-algebra di Hopf [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ si dice quasi-algebra di Hopf se ammette un antiendomorfismo s e due elementi privilegiati α e β tali che:

$$s(a_1)\alpha a_2 = \alpha\,\varepsilon(a) \qquad a_1\beta s(a_2) = \beta\,\varepsilon(a)$$

$$\Phi^1\beta s(\Phi^2)\alpha\Phi^3 = 1 \qquad s(\phi^1)\alpha\phi^2\beta s(\phi^3) = 1$$

La terna (s, α, β) prende il nome di quasi-antipode.

Teorema (Hausser e Nill, 1999)

Sia $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ una quasi-algebra di Hopf con s invertibile e sia M un quasi-bimodulo di Hopf su H. Definiamo, per ogni $m \in M$ e $a \in H$,

$$E(m) := \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s\left(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1\right), \quad a \triangleright m := E(a \cdot m), \quad M^{\mathrm{Co}H} := E(M)$$

e dotiamo $M^{\mathrm{Co}H}$ di struttura di H-modulo sinistro mediante $\triangleright$. Allora:

$$\nu\colon M^{\mathrm{Co}H} \otimes H \to M\colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

è un isomorfismo di quasi-bimoduli di Hopf con inversa: $\nu^{-1}(m) = E(m_0) \otimes m_1$.

Moduli sinistri e quasi-bimoduli di Hopf

Teorema

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra e sia $A^+ := \ker(\varepsilon)$. Sia anche $\overline{M} := \frac{M}{MA^+}$ A-modulo sinistro, $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Per ogni M quasi-bimodulo di Hopf si ha un morfismo naturale:

$$\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1 .$$

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$;
2. $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, *esiste una trasformazione lineare* $\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \to M$ *tale che,* $\forall\, m \in M$
   - (i) $\widetilde{\tau}_M(\overline{m_0}) \cdot m_1 = m$
   - (ii) $\overline{\widetilde{\tau}_M(\overline{m})_0} \otimes \widetilde{\tau}_M(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1$

Moduli sinistri e quasi-bimoduli di Hopf

Teorema

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *quasi-bialgebra e sia* $A^+ := \ker(\varepsilon)$*. Sia anche* $\overline{M} := \frac{M}{MA^+}$ *A-modulo sinistro,* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$*. Per ogni* M *quasi-bimodulo di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1.$$

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *una quasi-bialgebra. TFAE:*

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$;
2. $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$*, esiste una trasformazione lineare* $\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \to M$ *tale che,* $\forall\, m \in M$
   (i) $\widetilde{\tau}_M(\overline{m_0}) \cdot m_1 = m$
   (ii) $\overline{\widetilde{\tau}_M(\overline{m})_0} \otimes \widetilde{\tau}_M(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1$

Moduli sinistri e quasi-bimoduli di Hopf

Teorema

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *quasi-bialgebra e sia* $A^+ := \ker(\varepsilon)$*. Sia anche* $\overline{M} := \frac{M}{MA^+}$ *A-modulo sinistro,* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$*. Per ogni M quasi-bimodulo di Hopf si ha un morfismo naturale:*

$$\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1 .$$

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *una quasi-bialgebra. TFAE:*

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$;
2. $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, *esiste una trasformazione lineare* $\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \to M$ *tale che,* $\forall\, m \in M$
   - (i) $\widetilde{\tau}_M(\overline{m_0}) \cdot m_1 = m$
   - (ii) $\overline{\widetilde{\tau}_M(\overline{m})_0} \otimes \widetilde{\tau}_M(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1$

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è una trasformazione lineare $S \colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M \colon M \to M \colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \to M$ definita da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ definita da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ definita da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ definita da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ definita da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

La costruzione del preantipode

Supponiamo che η_M sia un isomorfismo $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Poniamo $A\widehat{\otimes}A := {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$ quasi-bimodulo di Hopf e consideriamo l'isomorfismo:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Supponiamo che η_M sia un isomorfismo $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Poniamo $A\widehat{\otimes}A := {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$ quasi-bimodulo di Hopf e consideriamo l'isomorfismo:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Supponiamo che η_M sia un isomorfismo $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Poniamo $A\widehat{\otimes}A := {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$ quasi-bimodulo di Hopf e consideriamo l'isomorfismo:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Supponiamo che η_M sia un isomorfismo $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Poniamo $A\widehat{\otimes}A := {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$ quasi-bimodulo di Hopf e consideriamo l'isomorfismo:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.
2. *A ammette un preantipode.*

Supponiamo che η_M sia un isomorfismo $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Poniamo $A\widehat{\otimes}A := {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$ quasi-bimodulo di Hopf e consideriamo l'isomorfismo:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. $\eta_M \colon M \to \overline{M} \otimes A \colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.
2. *A ammette un preantipode.*

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire l'ultima proposizione: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Se $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ allora:

- *A è Hopf ordinaria con $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.*
- *$(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:

1. *A è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *$\eta_M : M \to \overline{M} \otimes A : m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ è un isomorfismo $\forall M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.*

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire l'ultima proposizione: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Se $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ allora:

- *A è Hopf ordinaria con $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.*
- *$(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:

1. *A è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *$\eta_M : M \to \overline{M} \otimes A : m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ è un isomorfismo $\forall M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.*

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire l'ultima proposizione: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *quasi-bialgebra con preantipode. Se* $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ *allora:*

- A *è Hopf ordinaria con* $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.
- $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ *è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:*

1. A *è una quasi-algebra di Hopf.*
2. $\eta_M : M \to \overline{M} \otimes A : m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire l'ultima proposizione: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *quasi-bialgebra con preantipode. Se* $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ *allora:*

- A *è Hopf ordinaria con* $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.
- $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ *è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:*

1. A *è una quasi-algebra di Hopf.*
2. $\eta_M : M \to \overline{M} \otimes A : m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1$ *è un isomorfismo* $\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A^{\bullet}_{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A^{\bullet}_{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} : a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta} \colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists \widetilde{\gamma} \colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s \colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta \colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$. $\exists\; s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A^{\bullet}_{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A^{\bullet}_{\bullet} \colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A\otimes A \to \overline{A\otimes A}\otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A)<\infty \Rightarrow \overline{A\otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\,\widetilde{\gamma}\colon \overline{A\otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1\otimes a})$, $\forall\, a\in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a\otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A\otimes A}$ è $A\otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A\otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\ s\colon A\to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma}\otimes A)\circ\hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet}\otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ}\otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a\otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2)\otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A\otimes\varepsilon)(\theta^{-1}(1\otimes 1))$. Si prova che (s,α,β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- $\hat{\eta}\colon A \otimes A \to \overline{A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo di A-moduli sinistri.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ come A-moduli sinistri.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ di A-moduli sinistri.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1 S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1 S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1 S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 $(\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2)$ con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1-g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S \colon H(2) \to H(2) \colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi \colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2) \colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S \colon H(2) \to H(2) \colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi \colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2) \colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S\colon H(2) \to H(2)\colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi\colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2)\colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S \colon H(2) \to H(2) \colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi \colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2) \colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.

Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S\colon H(2) \to H(2)\colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi\colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2)\colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

bibliografia

A. Ardizzoni, A. Pavarin, *Preantipodes for Dual Quasi-Bialgebras*. Israel J. Math. **192** (2012), no. 1, 281-295.

V. G. Drinfel'd, *Quasi-Hopf algebras*. (Russian) Algebra i Analiz **1** (1989), no. 6, 114-148; translation in Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 6, 1419-1457.

P. Etingof, S. Gelaki, *Finite dimensional quasi-Hopf algebras with radical of codimension 2*. Math. Res. Lett.**11** (2004) no. 5-6, 685-696.

F. Hausser, F. Nill, *Integral theory for quasi-Hopf algebras*, preprint (arXiv:math/9904164v2).

R. G. Larson, M. E. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*. Amer. J. Math. **91** (1969), 75-94.

P. Schauenburg, *Two characterizations of finite quasi-Hopf algebras*. J. Algebra **273** (2004), no. 2, 538-550.

M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.